PENGANTAR KALKULUS

Disampaikan pada Diklat Instruktur/Pengembang Matematika SMA

Jenjang Dasar

Tanggal 6 s.d. 19 Agustus 2004

di PPPG Matematika

Oleh:

Drs. SETIAWAN, M. Pd.

Widyaiswara PPPG Matematika Yogyakarta

==

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL

DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH

PUSAT PENGEMBANGAN PENATARAN GURU (PPPG) MATEMATIKA

YOGYAKARTA

2004

BAGIAN IV
KALKULUS INTEGRAL

Kegunaan integral sebagai ilmu bantu dalam geometri, teknologi, biologi dan ekonomi tak dapat disangkal lagi. Orang yang tercatat dalam sejarah pertama kali mengemukakan ide tentang integral adalah Archimedes seorang ilmuwan bangsa Yunani yang berasal dari Syracusa (287 – 212 SM). Archimedes menggunakan ide integral tersebut untuk mencari luas daerah suatu lingkaran, daerah yang dibatasi oleh parabola dan tali busur dan sebagainya. Sejarah mencatat orang yang paling berjasa dalam hal pengembangan kalkulus integral adalah Georg Friederich Benhard Riemann (1826 – 1866).

A. Integral Taktentu

1. Integral sebagai operasi invers dari turunan.

Misalkan fungsi f adalah turunan dari fungsi F, yang berarti

$F(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

Pandanglah pendiferensialan fungsi-fungsi di bawah ini

$F(x) = x^3 \quad \Rightarrow F'(x) = f(x) = 3x^2$

$F(x) = x^3 + 5 \quad \Rightarrow F'(x) = f(x) = 3x^2$

$F(x) = x^2 - \sqrt{17} \Rightarrow F'(x) = f(x) = 3x^2$

$F(x) = x^3 + c$ (c = konstanta) $\Rightarrow F'(x) = f(x) = 3x^2$

Sekarang timbul pertanyaan apakah dari hubungan $F'(x) = f(x)$ ini jika f(x) dikethui maka f(x) pasti dapat ditentukan ?

Suatu operasi mencari F(x) jika f(x) diketahui yang merupakan invers dari operasi pendiferensialan disebut operasi anti derivatif, anti diferensial, anti turunan yang biasa disebut Operasi integral.

Dari contoh di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa anti turunan dari $f(x) = 3x^2$ adalah $F(x) = x^3 + c$, c = konstanta.

Dari pengertian bahwa integral adalah invers dari Operasi pendiferensialan, maka apabila terdapat fungsi F(x) yang diferensial pada interval [a, b] sedemikian hingga $\frac{df(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$ maka anti turunan dari f(x) adalah F(x) + c, dan biasa kita tulis dengan notasi.

$\int f(x)dx == F(x) + c$ Notasi $\int$ adalah notasi integral tak tentu.

Catatan :

Orang yang pertama kali memperkenalkan lambang $\int$ sebagai lambang integral adalah Leibniz, yang disepakati sebagai slah seorang penemu dari Kalkulus.

Dari contoh di atas diperoleh hasil $\int 3x^2\, dx = x^3 + c$

Dengan memperhatikan diferensial-diferensial di bawah ini:

$F(x) = x + c \quad \Rightarrow F'(x) = 1$

$F(x) = ax + c \quad \Rightarrow F'(x) = a$

$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{n+1}(n+1)^{x^n} = x^n\ 1$

$F(x) = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c \quad \Rightarrow F'(x) = \frac{a}{n+1}(n+1)^{x^n} = ax^n$

maka diperoleh integral fungsi-fungsi aljabar :

(1) $\int dx = x + c$

(2) $\int adx = ax + c$

(3) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, n \neq -1$

(4) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, n \neq -1$

Dari integral adalah invers diferensial maka

(5) $\int (f(x) \pm f(x))^{dx} = \int f(x) \pm \int g(x)dx$

(6) $\int a\, f(x)dx = {}^a\int f(x)dx$

Contoh 1. Tentukan $\int (x^3 2x)dx$

Jawab: $\int (x^3 - 2x)dx = \frac{1}{4}x^4 - 2.\frac{1}{2}x^2 + c$

$= \frac{1}{4}x^4 - x^2 + c$

Contoh 2. Integralkanlah $(3x^3 - 4)^2$

Jawab: $\int (3x^3 - 4)^2 dx = \int (gx^6 - 24x^3 + 16)dx$

$= 9.\frac{1}{7}x^7 - 24.\frac{1}{4}x^4 + 16x + c$

$= \frac{9}{7}x^7 - 6x^4 + 16x + c$

Mengingat pendiferensialan fungsi-fungsi yang lain; yaitu:

Jika f(x) = sin x maka f′(x) = cos x

Jika f(x) = cos x maka f′(x) = -sin x

Jika f(x) = tan x maka f′(x) = $\sec^2$ x

Jika f(x) = cot x maka f′(x) = -$\csc^2$ x

Jika f(x) = sec x maka f′(x) = sec x tanx

Jika f(x) = csc x maka f′(x) = -csc x cot x

Jika f(x) e^x maka f′(x) = e^x

Jika f(x) ln x maka f′(x) = $\frac{1}{x}$

Dengan mengingat integral adalah operasi invers dari pendiferensialan, maka akan diperoleh rumus-rumus pengintegralan.

(7)	$\int \cos x\, dx = \sin x + c$
(8)	$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$
(9)	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$
(10)	$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c$
(11)	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$
(12)	$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + c$
(13)	$\int e^x\, dx = e + c$
(14)	$\int \frac{dx}{x} = \ln \lvert x \rvert + c$

Contoh 3. Gradien pada titik (x,y) dari suatu kurva y = f(x) diketahui memenuhi hubungan $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$ dan melalui (3, 5).

Tentukan persamaan kurvanya.

Jawab:

Gradien kurva y = f(x) adalah $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$

Sehingga y = $\int (2x - 3) dx$

$y = 2.\frac{1}{2}x^2 - 3x + c$

$\Leftrightarrow y = x^2 - 3x + c$

Melalui (3, 5) $\rightarrow 5 = 3^2 - 3.3 + c$

$5 = c$

Jadi persamaannya : $y = x^2 - 3x + 5$

Jika suatu soal integral tak dapat diselesaikan dengan integral langsung, mungkin dengan mensubstitusi variabel baru soal tersebut dapat dipecahkan.

2. Pengintegralan Dengan Substitusi

Menentukan integral fungsi yang dapat disederhanakan menjadi bentuk

$\int (f(x))^n \, d(f(x))$.

Mengacu pada rumus pengintegralan bentuk $\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c,\ n \neq -1$,

maka pengintegralan $\int u^n\, dx = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c,\ n \neq -1$

Contoh 1.

Tentukan $\int \sqrt{x^3 + 2}\ \ x^2\, dx$

Jawab : Misalkan $u = x^3 + 2$ maka $du = 3x^2 \rightarrow x^2dx = \frac{1}{3}du$.

Sehingga $\int \sqrt{x^3+2}\ x^2dx = \int \sqrt{u}\ .\frac{1}{3}du$

$$= \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{2}{3}u^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{9}(x^3+2)^{\frac{9}{2}} + c.$$

Contoh 2. : $\int \frac{(x+3)dx}{(x^2+6x)^{\frac{1}{9}}}$

Jawab : Misalkan $u = x^2 + 6x \rightarrow du = (2x + 6)dx$

$$\rightarrow (x + 3)dx = \frac{1}{2}du.$$

Sehingga : $\int \frac{(x+3)dx}{(x^2+6x)^{\frac{1}{9}}} = \int \frac{\frac{1}{2}du}{u^{\frac{1}{3}}}$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{9}}du$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\frac{1}{2}}{3}u^{\frac{2}{9}} + c$$

$$= \frac{3}{4}(x^2+6x)^{\frac{2}{9}} + c.$$

Contoh 3.

Integralkanlah $\int \sin^5 3x\ dx$

Jawab : $\int \sin^5 3x\ dx = \int (\sin^2 3x)^2 \sin 3x\ dx$

Misalkan $u = \cos 3x \rightarrow du = -3 \sin 3x\ dx$

$$\sin 3x\ dx = -\frac{1}{3}du$$

Sehingga $\int (\sin^2 3x)^2 \sin 3x\ dx = \int (1-\cos^2 3x)^2 \sin 3x\ dx$

$$= \int (1-u^2)^2 (-\frac{1}{3}du)$$

$$= -\frac{1}{3}\int (1-2u^2+u^4)du$$

$$= -\frac{1}{3}\cos 3x + \frac{2}{9}\cos^3 3x - \frac{1}{15}\cos^5 3x + c.$$

Contoh 4.

$\int \sin^5 5x \cos^3 5x \, dx$

Jawab : Misalkan u = sin 5x $\rightarrow$ du = 5 cos 5x dx

$$\frac{1}{5}du - \cos 5x \, dx$$

$$\int \sin^6 5x \cos^3 5x \, dx = \int \sin^6 5x \,.(1-\sin^2 6x).\cos 5x \, dx$$

$$= \int \sin^6 5x \,.(1\text{-}\sin^2 6x)\,.\cos 5x \, dx$$

$$= \int u^6 (1-u^2)\,.\frac{1}{5}du$$

$$= \frac{1}{5}\int (u^6 - u^3)du$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{1}{7}u^7 - \frac{1}{9}u^9) + c$$

$$= \frac{1}{35}\sin^7 5x - \frac{1}{45}\sin^9 5x + c$$

Latihan 5.

Tentukanlah :

1. $\int (x^3+2)^2 3x^2 dx$
2. $\int (x^3+2)^{\frac{1}{2}} x^2 dx$
3. $\int \dfrac{8x^2 dx}{(x^3+2)^3}$

9. $\int \dfrac{\sin x \, dx}{\cos^3 x}$
10. $\int \dfrac{\cos x \, dx}{\sin^2 x}$
11. $\int \dfrac{tg\, x \, dx}{\cos^3 x}$

4. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+2}}$

5. $\int 3x\sqrt{1-2x^2}\ dx$

6. $\int x\sqrt[3]{1-2x^2}\ dx$

7. $\int x^3\sqrt{3-2x^4}\ dx$

8. $\int \frac{x\ dx}{\sqrt{2x^2+3}}$

12. $\int \frac{\cot g\ x\ dx}{\sin^2 x}$

13. $\int \frac{tg(3x+2)dx}{\cos(3x+2)}$

14. $\int \frac{\sin 2x\ dx}{(1-\cos 2x)^2}$

15. $\int \frac{\cos 3x\ dx}{(3+2\sin 3x)}$

16. $\int \frac{\sqrt{\tan x-1}}{\cos^2 x}dx$

Tentukan pula antiderivatif dari soal-soal di bawah ini !

17. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+3}}dx$

18. $\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\ dx$

19. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

20. $\int \frac{dx}{(a+bx)^{\frac{1}{3}}}\ dx$

21. $\int \frac{xdx}{(a+bx)^{\frac{2}{3}}}$

22. $\int \cos^5 x\ dx$

23. $\int \sin^2 x\cos^3 xdx$

24. $\int \cos^4 2x\sin^3 2xdx$

25. $\int \sin^3 3x\cos^5 3x\ dx$

26. $\int \cos^3 \frac{x}{3}\ dx$

27. $\int \sin^4 x\ dx$

28. $\int \sin^4 3x\cos^2 3x\ dx$

29. $\int (1+\cos 3x)^{\frac{3}{2}}\sin 3x\ dx$

30. $\int (\tan^3 3x\sec^4 3x)dx$

3. Menentukan Hasil dari $\int \sqrt{a^2-x^2}\ dx$ dengan Substitusi x = sin t atau y=cost

Bentuk-bentuk integral di atas dapat digunakan substitusi dengan menggunakan bantuan sketsa geometri.

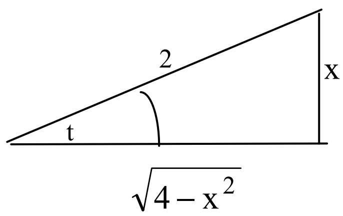
Contoh 1

Tentukan $\int \sqrt{4-x^2}\ dx$

Misalkan $\sin t = \frac{x}{2} \longrightarrow x = 2\sin t$

$dx = 2\cos t$

$\cos t = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \longrightarrow \sqrt{4-x^2} = 2\cos t$



Sehingga $\int \sqrt{4-x^2}\ dx = \int 2\cos t . 2\cos t dt$

$$= 2\int 2\cos^2 t dt$$

$$= 2\int (1+\cos 2t) dt$$

$$= 2(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + c$$

Untuk mengembalikan hasil dalam t ini kembali ke variabel x digunakan fungsi invers dari fungsi trigonometri, yang biasa kita kenal sebagai fungsi siklometri.

Bahwa jika $f(x) = \sin x$ maka $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ = arc sin x

$f(x) = \cos x$ maka $f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$ = arc cos x

$f(x) = \tan x$ maka $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$ = arc tan x

Dengan hubungan jika y = sin x maka x = arc sin y

Dari persoalan di atas, dari

$$\int \sqrt{4-x^2}\ dx = 2t + \sin 2t + c$$

$$= 2t + 2\sin t . \cos t + c$$

$\sin t = \frac{x}{2} \longrightarrow t = \text{arc sin } \frac{x}{2}$ yang berarti :

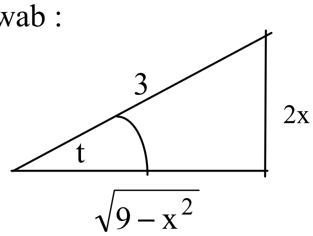
$$\int \sqrt{4-x^2}\ dx = 2 \text{ arc sin } \frac{x}{2} + 2.\frac{x}{2}.\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + c$$

$$= 2 \text{ arc sin} \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + c$$

Contoh 2 .

Tentukan $\int \sqrt{9-4x^2}\ dx$

Jawab :



Misalkan $\sin t = \frac{2x}{3} \longrightarrow x = \frac{3}{2}\sin t$

$$dx = \frac{3}{2}\cos t\ dt$$

dan t = arc $\frac{2x}{3}$

$$\cos t = \frac{\sqrt{9-4x^2}}{3} \longrightarrow \sqrt{9-4x^2} = 3\cos t$$

$$\text{Sehingga : } \int \sqrt{9-4x^2}\, dx = \int 3\cos t . \frac{3}{2}\cos t dt$$

$$= \frac{9}{4}\int \cos^2 t dt$$

$$= \frac{9}{4}\int (1 + \cos 2t)\, dt$$

$$= \frac{9}{4}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + c$$

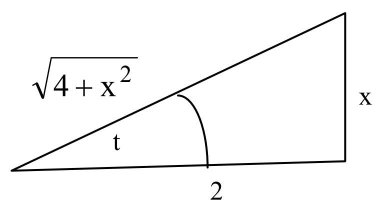
$$= \frac{9}{4}(t + \sin t . \cos t) + c$$

$$= \frac{9}{4}(\arcsin \frac{2x}{3} + \frac{2x}{3} . \frac{\sqrt{9-4x^2}}{3}) + c$$

$$= \frac{9}{4} \arcsin \frac{2x}{3} + \frac{3x}{2}\sqrt{9-4x^2} + c$$

Contoh 3.

Tentukanlah $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$



$$\text{Misalkan } \tan t = \frac{x}{2} \longrightarrow x = 2\tan t$$

$$dx = 2\sec^2 t\, dt$$

$$\sec t = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} \longrightarrow \sqrt{4+x^2} = 2\sec t$$

$$\text{Sehingga } \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2 t dt}{(2\tan t)^2 \sec t}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sec t dt}{\tan^2 t}$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^{-2} t \cos t\, dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^{-2} d(\sin t)$$

$$= -\frac{1}{4} \sin^{-1} t + c$$

$$= \frac{-1}{4\sin t} + c$$

$$= \frac{-1}{4\dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}} + c$$

$$= \frac{-\sqrt{4+x^2}}{4x} + c$$

Latihan 6

Tentukanlah integral dari soal-soal di bawah ini !

1. $\int \sqrt{1-x^2}\ dx$
2. $\int \sqrt{25-x^2}\ dx$
3. $\int \sqrt{3-x^2}\ dx$
4. $\int \sqrt{5-x^2}\ dx$
5. $\int \sqrt{9-4x^2}\ dx$
6. $\int \sqrt{3-4x^2}\ dx$
7. $\int \sqrt{5-3x^2}\ dx$
8. $\int \frac{(16-9x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6}\ dx$
9. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x-x^2}}$
10. $\int \frac{dx}{(4x^2-24x+27)^{\frac{3}{2}}}$
11. $\int \frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$
12. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$
13. $\int \frac{x^2 dx}{(4-x^2)^{\frac{5}{2}}}$
14. $\int \frac{x^2 dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$
15. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$
16. $\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\ dx$
17. $\int \frac{dx}{(4x-x^2)^{\frac{1}{2}}}$
18. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\ dx$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$

4. Integral Parsial

Misalkan u dan v masing-masing fungsi yang diferensiabel dalam x, maka diferensial dari y = u.v adalah :

$$d(u.v) = u.dv + v.du$$

dan jika kedua ruas diintegralkan, akan diperoleh :

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

$$uv = \int udv + \int vdu$$

atau :

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Rumus integral ini disebut rumus **integral parsial** dimana rumus ini biasa digunakan apabila $\int vdu$ mudah dicari dalam upaya mencari penyelesaian dari $\int udv$ yang secara langsung sulit.

Contoh 1.

Tentukan integral-integral :

a. $\int x\sqrt{3+x}\ dx$

b. $\int x\sin 3x\ dx$

Jawab :

a. Misalkan u = x maka du = dx

dan $dv = \sqrt{3+x}$ maka $v = \int \sqrt{3+x}\ dx = \int (3+x)^{\frac{1}{2}} d(3+x) = \frac{2}{3}(3+x)^{\frac{3}{2}} + c$

$$\text{Sehingga } \int x\sqrt{3+x}\ dx = x.\ \frac{2}{3}(3+x)^{\frac{3}{2}} - \int \tfrac{2}{3}(3+x)^{\frac{3}{2}}\ dx$$

$$= \tfrac{2}{3}x(3+x)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3}\int (3+x)^{\frac{3}{2}} d(3+x)$$

$$= \tfrac{2}{3}x(3+x)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3}.\tfrac{2}{5}(3+x)^{\frac{5}{2}} + c$$

$$= \tfrac{2}{3}x(3+x)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{4}{15}(3+x)^{\frac{5}{2}} + c$$

b. Misal $u = x \longrightarrow du = dx$

$dv = \sin 3x\ dx \longrightarrow v = \int \sin 3x dx = -\tfrac{1}{3}\cos 3x + c$

$$\text{Sehingga } \int x\sin 3x\ dx = x(-\tfrac{1}{3}\cos 3x) - \int(-\tfrac{1}{3}\cos 3x)dx$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + c$$

Untuk soal-soal tertentu kadang-kadang diperlukan lebih dari sekali memparsialkan.

Contoh 2.

Tentukanlah $\int x^2\cos(2x+3)dx$

Jawab : Misalkan $u = x^2$ maka $du = 2x\ dx$ dan $dv = \cos(2x + 3)\ dx$

Maka $v = \int \cos(2x+3)dx = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + c$

Sehingga :

$$\int x^2 \cos(2x+3)dx = x^2 (\frac{1}{2}\sin(2x+3) - \int \frac{1}{2}\sin(2x+3).2xdx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \sin(2x+3) - \int x\sin(2x+3)dx \quad \text{.... (i)}$$

Integral $\int x\sin(2x+3)dx$ dapat dicari dengan memparsialkan sekali lagi

$$\int x\sin(2x+3)dx = \int x(-\frac{1}{2}d(\cos(2x+3)) = -\frac{1}{2}\int xd(\cos(2x+3))$$

$$= -\frac{1}{2}(x\cos(2x+3) - \int \cos(2x+3)dx)$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos(2x+3) + \frac{1}{4}\sin(2x+3) + c \quad \text{........(ii)}$$

Dari (i) dan (ii) diperoleh :

$$\int x^2 \cos(2x+3)dx = \frac{1}{2}x^2 \sin(2x+3) - (-\frac{1}{2}x\cos(2x+3) + \frac{1}{4}\sin(2x+3)) + c$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \sin(2x+3) + \frac{1}{2}x\cos(2x+3) - \frac{1}{4}\sin(2x+3)) + c$$

Pengembangan :

Khusus untuk pengintegralan parsial berulang bentuk $\int udv$ yang turunan ke-k dari u adalah 0 (nol), dan integral ke-k dari v ada, maka integral berulang di atas dapat ditempuh cara praktis sebagaimana contoh di bawah ini.

Contoh 2

Tentukanlah $\int x^2 \cos(2x+3)dx$

Jawab :

diturunkan		diintegralkan
x^2	+	$\cos(2x+3)$
$2x$	−	$\frac{1}{2}\sin(2x+3)$
2	+	$-\frac{1}{4}\cos(2x+3)$
0		$-\frac{1}{8}\sin(2x+3)$

Sehingga :

$$\int x^2 \cos(2x+3)dx = \frac{1}{2}x^2 \sin(2x+3) + \frac{1}{2}x\cos(2x+3) - \frac{1}{2}\sin(2x+3) + c$$

Contoh 3

Integralkanlah : $\int x^4 \sin(2x+3)dx$

Jawab :

diturunkan		diintegralkan
x^4	$+$	$\sin(2x+3)$
$4x^3$	$-$	$-\frac{1}{2}\cos(2x+3)$
$12x^2$	$+$	$-\frac{1}{4}\sin(2x+3)$
$24x$	$-$	$\frac{1}{8}\cos(2x+3)$
24	$+$	$\frac{1}{16}\sin(2x+3)$
0		$-\frac{1}{32}\cos(2x+3)$

Sehingga :

$$\int x^4 \sin(2x+3)dx = -\frac{1}{2}x^4\cos(2x+3) + x^3\sin(2x+3) + \frac{3}{2}x^2\cos(2x+3) -$$
$$-\frac{3}{2}x\sin(2x+3) - \frac{3}{4}\cos(2x+3) + c$$

Latihan 7

Dengan menggunakan integral parsial, carilah integral berikut ini :

1. $\int x(2x-3)^5 dx$
2. $\int x(3x+4)^6 dx$
3. $\int \frac{3x}{2}(x-2)^{\frac{3}{2}} dx$
4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-3}}$
5. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{3x-1}}$
6. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2-4}}$
7. $\int 3x\cos 3xdx$
8. $\int x\sin(\frac{1}{5}x)dx$
9. $\int (3x+4)\cos(4x-3)dx$
10. $\int x^2\cos xdx$
11. $\int x^2\sin(3x-3)dx$
12. $\int x^2\sin(3x+2)dx$
13. $\int x^2\sqrt{9-x}dx$
14. $\int x^3\cos(2x-3)dx$
15. $\int \sin^3 xdx$ (petunjuk ubah kebentuk $\int \sin^2 x\sin xdx$
16. $\int \cos^4 xdx$
17. $\int \frac{xdx}{x-1}$
18. $\int x\sqrt{2-x}dx$
19. $\int x\cos xdx$
20. $\int x\cos(2x-\frac{5}{3})dx$

Pengayaan :

Pengintegralan fungsi-fungsi trigonometri, kecuali dengan substitusi dapat juga digunakan rumus – rumus reduksi di bawah ini :

1. $\int \sin^n u du = \frac{-\sin^{n-1} u \cos u}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} u du$

2. $\int \cos^n u du = \frac{\cos^{n-1} u \sin u}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u du$

3. $\int \sin^n u \cos^m du = \frac{\sin^{n+1} u \cos^{m+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{n+m}\int \sin^n u \cos^{m-2} u du, n \neq -m$

$$= \frac{-\sin^{n-1} u \cos^{m+1} u}{m+n} + \frac{n-1}{n+m}\int \sin^{n-2} u \cos^n u du, n \neq -m$$

Bukti :

1. $\int \sin^n u du = \int \sin^{n-1} u \sin u du$

$$= -\int \sin^{n-1} u d(\cos u)$$

$$= -\sin^{n-1} u \cos u + \int \cos u d(\sin^{n-1} u)$$

$$= -\sin^{n-1} u \cos u + (n-1)\int \cos u \sin^{n-2} u \cos u du$$

$$= -\sin^{n-1} u \cos u + (n-1)\int \cos^2 u \sin^{n-2} u du$$

$$= -\sin^{n-1} u \cos u + (n-1)\int (1-\sin u)\sin^{n-2} u du$$

$$= -\sin^{n-1} u \cos u + (n-1)\int \sin^{n-2} u du - (n-1)\int \sin^n u du$$

$n\int \sin^n u du = -\sin^{n-1} u \cos u + (n-1)\int \sin^{n-2} u du$

Jadi $\int \sin^n u du = \frac{-\sin^{n-1} u \cos u}{u} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} u du$

Contoh 1

Tentukanlah $\int \sin^3 (5x-2) dx$

Jawab : $\int \sin^3 (5x-2) dx = \frac{1}{5}\int \sin^3 (5x-2) d(5x-2)$

$$= \frac{1}{5}(-\frac{\sin^2 (5x-2)\cos(5x-2)}{3} + \frac{2}{3}\int \sin(5x-2) d(5x-2)$$

$$= -\frac{1}{15}\sin(5x-2)\cos(5x-2) - \frac{2}{15}\cos(5x-2)$$

Contoh 2

Tentukanlah $\int \cos^4(2x+3)dx$

Jawab : $\int \cos^4(2x+3)dx = \frac{1}{2}\int \cos^4(2x+3)d(2x+3)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^3(2x+3)\sin(2x+3)}{4} + \frac{3}{4}\int \cos^2(2x+3)d(2x+3)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cos^3(2x+3)\sin(2x+3) + \frac{3}{8}\left(\frac{\cos(2x+3)\sin(2x+3)}{2} + \frac{1}{2}\int d(2x+3)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cos^3(2x+3)\sin(2x+3) + \frac{3}{16}\cos(2x+3)\sin(2x+3) + \frac{3}{16}(2x+3) + c$$

Latihan 8

Dengan menggunakan rumus reduksi selesaikan pengintegralan di bawah ini

1. $\int \sin^4 x dx$
2. $\int \cos^4 x dx$
3. $\int \cos^5 x dx$
4. $\int \sin^5 x dx$
5. $\int \cos^5 3x dx$
6. $\int \cos^3(2x+3)dx$
7. $\int \cos^5(3x+5)dx$
8. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$
9. $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$
10. $\int \sin 3x \cos^4 3x dx$
11. $\int \sin^3(2x+3)\cos^2(2x+3)dx$
12. $\int x^2 \sin(3x-2)dx$
13. $\int x^3 \cos(2x+3)dx$
14. $\int (2x+3)^3 \sin(4x+6)dx$
15. $\int (2x-3).^2 \cos(4x-6)dx$
16. $\int x^4 \sin(2x+3)dx$

5. Pengintegralan $\int \frac{du}{u}$

Dari f(x) = ln x $\rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ maka $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

Yang berarti $\boxed{\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c\,.}$

Contoh 1.

Tentukanlah $\int (1-e^{2x})^2 e^{2x} dx$

Jawab : Misalkan u = 1 – e^{2x} maka

du = -2e^{2x} dx $\rightarrow e^{2x}$ dx = $-\frac{1}{2}$du

Sehingga $\int (1-2^{2x})e^{2x}dx = \int u^2(-\frac{1}{2}du) = -\frac{1}{2}\int u^2du$

$$= -\frac{1}{2}.\frac{1}{3}u^3 + c$$

$$= -\frac{1}{6}(1-e^{2x}) + c$$

Contoh 2.

Tentukanlah $\int \sin x\, e^{3-\cos x}dx$

Jawab misalkan u = 3 – cos x

du = sin x dx

sehingga $\int \sin x\, e^{3-\cos x}dx = \int e^u du$

$$= e^u + c$$

$$= e^{3-\cos x} + c$$

Contoh 3.

Integralkanlah $\int \frac{dx}{x(5+\ln x)}$

Jawab : Misalkan u = 5 + ln x

$du = \frac{dx}{x}$

Sehingga $\int \frac{dx}{x(3+\ln x)} = \int \frac{du}{u}$

$$= \ln |u| + c$$

$$= \ln(5 + \ln |x|) + c$$

Contoh 4.

Integralkanlah $\int \log(2x+3)\,dx$

Jawab : Misalkan u = log (2x + 3) = $\frac{\ln(2x+3)}{\ln 10}$

$\rightarrow du = \frac{2\,.\,dx}{(2x+3)\ln 10}$

$du = dx = \frac{1}{2}d\ (2x+3) \rightarrow u = \frac{1}{2}(2x+3) + c$

Sehingga :

$$\int \log(2x+2)dx = \frac{1}{2}(2x+3)\log(2x+3) - \int \frac{1}{2}(2x+3)\,.\,\frac{2\,dx}{(2x+3)\ln 10}$$

$$= \frac{1}{2}(2x+3)\log(2x+3) - \frac{1}{\ln 10}\int dx$$
$$= \frac{1}{2}(2x+3)\log(2x+3) - \frac{x}{\ln 10} + c.$$

Contoh 5.

Integralkanlah $\int e^x \sin x\, dx$

Jawab : $\int e^x \sin x\, dx = -\int ex^x d(\cos x)$

$$= -\left(e^x \cos x - \int \cos x\, d(e^x)\right).$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x\, d(\sin x)$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int \sin x\, d(e^x)$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

$$= 2\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x + c$$

Jadi $\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c.$

Latihan 9.

Tentukanlah integral dari :

1. $\int \frac{x\, dx}{x^2 - 1}$
2. $\int \frac{x + 2\, dx}{x + 1}$
3. $\int e^{-x} dx$
4. $\int e^{3-4x} dx$
5. $\int \frac{dx}{u^x + 1}$
6. $\int \frac{x^2 dx}{1 - 2x^3}$
7. $\int \mathrm{tg}(3x - 4)\, dx$

11. $\int \frac{e^{2x} dx}{e^{2x} - 3}$
12. $\int \frac{(e^x - 1)dx}{e^x - 1}$
13. $\int \frac{(e^{2x} - 1)dx}{e^{2x} - 3}$
14. $\int \frac{\sec^2 5x\, dx}{\mathrm{tg}\, 5x}$
15. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$
16. $\int \frac{e^{2x} dx}{1 + e^{2x}}$
17. $\int \sqrt{x^2 - 16}\, dx$

8. $\int x^2 \text{ctg}(x^2+4)\,dx$

9. $\int \sec x\,dx \begin{pmatrix}\text{Petunjuk mis.} \\ u = \sec x + \text{tg } x\end{pmatrix}$

10. $\int \cos 3x\,dx$

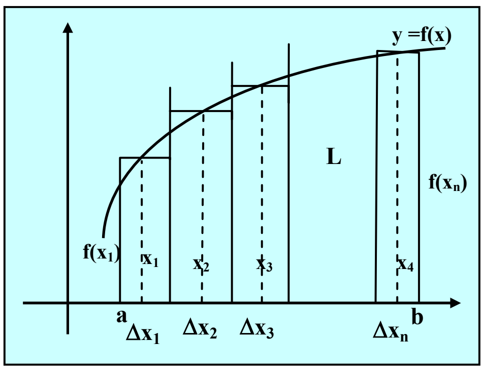
18. $\int \sqrt{x^2-36}\,dx$

19. $\int \sqrt{3x^2+5}\;\;dx$

20. $\int \sqrt{3x^2-4x+5}\;dx$

B. Integral tertentu

1. Pengertian Integral Tertentu (Integral Riemann)



Gb.3.1

Gambar disamping memperlihatkan daerah L yang dibatasi oleh y = f(x), sumbu x dari x = a sampai dengan x = b.
Untuk mencari luas daerah L ditempuh langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah pertama, interval [a,b] dibagi menjadi n interval dengan panjang masing-masing interval bagian $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots, \Delta x_n$. Sedang pada masing-masing interval ditentukan titik-titik $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Selanjutnya dibuat persegipanjang-persegi-panjang dengan panjang masing-masing $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n)$ dan lebar masing-masing $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots, \Delta x_n$ sehingga :

Luas persegipanjang pertama	$= f(x_1).\Delta x_1$
Luas persegipanjang kedua	$= f(x_2).\Delta x_2$
Luas persegipanjang ketiga	$= f(x_3).\Delta x_3$
…	= …
Luas persegipanjang ke-n	$= f(x_n).\Delta x_n$ +
Jumlah luas seluruh persegipanjang	$= f(x_1).\Delta x_1+f(x_2).\Delta x_2+f(x_3).\Delta x_3+\ldots+f(x_n).\Delta x_n$
	$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i.$

Dan untuk menekankan bahwa pengambilan jumlah tersebut meliputi daerah pada interval [a,b], notasi sigma di atas sering kita tulis dengan notasi.

Jumlah semua luas persegipanjang = $\sum_{x=a}^{b} f(x).\Delta x.$

Jika n dibuat cukup besar maka jumlah luas diatas mendekati luas daerah L. Sehingga luas daeah L adalah nilai limit jumlah di atas.

$$L = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x=a}^{b} f(x).\Delta x.$$

Notasi tersebut di atas biasa ditulis dengan notasi integral tertentu atau integral Riemann :

$$\boxed{\mathbf{L = \int_a^b f(x)dx}.}$$

$\int_a^b$: notasi integral tertentu

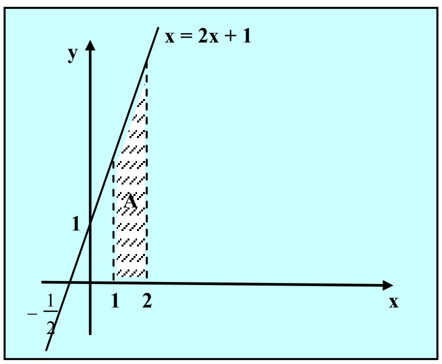
a : batas bawah integral

b : batas atas integral

Contoh 8

Tunjukkan dengan jalan mengarsir daerah yang ditunjukkan oleh $\int_1^3 (2x+1)dx$.

Jawab : Persamaan kurva y = 2x + 1

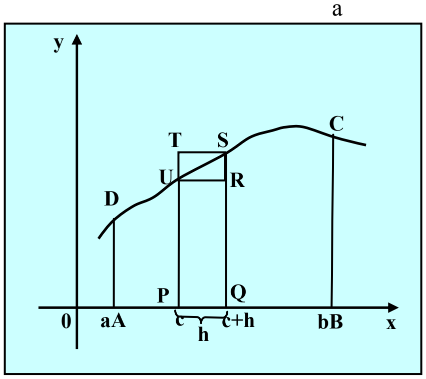


Gb.3.2

Integral di atas menyajikan daerah yang dibatasi oleh kurva y = 2x + 1, sumbu x, dengan garis-garis x = -1 dan x = 2, seperti daerah yang diarsir disamping.

2. Menentukan nilai $\int_a^b f(x)dx$

Untuk menentukan nilai $\int_a^b f(x)dx$ dicari sebagai berikut :



Gb.3.4

Andaikan akan dicari luas daerah yang dibatasi oleh y = f(x), sumbu x dari x = a sampai dengan x = b.

Misalkan luas daerah yang dicari adalah L(b), maka

$$L(b) = \int_a^b f(x)dx, \quad \text{dan}$$

$$L(c) = \int_a^c f(x)dx$$

$$L(c+h) = \int_a^{c+h} f(x)dx$$

$$L(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

Luas PQRU < luas PQSU < luas PQST

$f(c).h < L(c+h) - L(c) < f(c+h).h$

$f(c) < \dfrac{L(c+h) - L(c)}{h} < f(c+h), h \neq 0$

Jika $h \to 0$ maka

$\lim\limits_{h \to 0} f(c) \leq \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{L(c+h) - L(c)}{h} \leq \lim\limits_{h \to 0} f(c+h)$

$f(c) \leq L'(c) \leq f(c) \Rightarrow L'(c) = f(c)$.

Oleh karena hasil tersebut berlaku untuk setiap c pada interval [a,b] maka setiap $x \in [a,b]$ berlaku :

$L'(x) = f(x)$ sehingga

$L(x) = \int f(x)dx$.

Jika F(x) adalah anti turunan dari f(x) maka

$L(x) = F(x) + c$ .... (1)

Dari $L(a) = 0$, berarti $F(a) + c = 0$, sehingga $c = -F(a)$

(1) $\to L(b) = F(b) + c = F(b) - F(a)$.

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Contoh 9

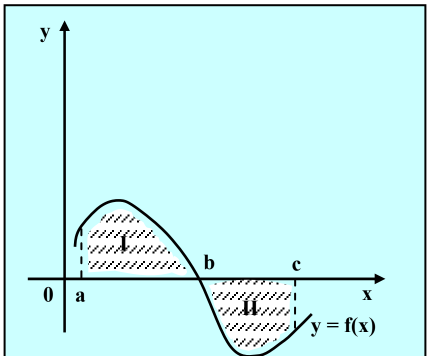
Tentukan nilai integral dari $\int_1^3 (2x+3)dx$.

Jawab : $\int_1^3 (2x+3)dx = [x^2 + 3x]_1^3$

$= (3^2 + 3.3) - (1^2 + 3.1) = 18 - 4$

$= 14$.

Untuk menentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = f(x), sumbu x dan garis x = a dan garis x = b.



Gb.3.5

Untuk daerah di atas sumbu x atau pada interval $a \le x < b$, $f(x) > 0$ untuk setiap x, sehingga $\sum_{x=a}^{b} f(x).\Delta x > 0$ yang berarti $\int_a^b f(x)dx$ adalah positip.

Sedang daerah yang terletak di bawah sumbu x atau $b < x \le c$, maka $f(x) < 0$ untuk setiap x.

Sehingga $\sum_{x=b}^{c} f(x).\Delta x < 0$ yang berarti $\int_b^c f(x)dx$ adalah negatif. Sehingga nilai integral $\int_b^c f(x)dx$ untuk daerah di bawah sumbu x bernilai **negatif**.

Contoh 10

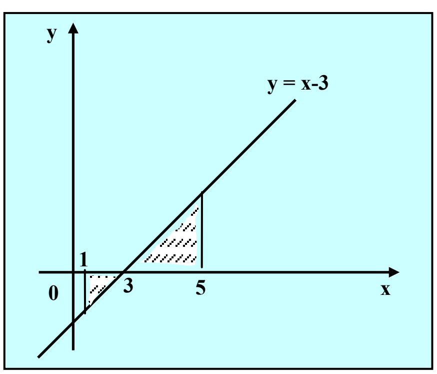
a. Hitung $\int_1^5 (x-3)dx$

b. Hitung luas daerah yang disajikan oleh integral di atas.

Penyelesaian : $\int_1^5 (x-3)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_1^5$

$$= \left(\frac{1}{2}.5^2 - 3.5\right) - \left(\frac{1}{2}.1^2 - 3.1\right) = \left(12\frac{1}{2} - 15\right) - \left(\frac{1}{2} - 3\right)$$

$$= -2\frac{1}{2} - \left(-2\frac{1}{2}\right) = 0\,.$$



Gb.3.6

Karena ada daerah yang terletak di bawah sumbu x, maka nilai integral tertentunya negatif, sehingga luas daerah yang diarsir

L = –I + II, atau

$$L = -\int_1^3 (x-3)dx + \int_3^5 (x-3)dx$$

$$= -\left[\frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_1^3 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_3^5$$

$$= -\left[\left(\frac{1}{2}.3^2 - 3.3\right) - \left(\frac{1}{2}.1^2 - 3.1\right)\right] + \left[\left(\frac{1}{2}.5^2 - 3.5\right) - \left(\frac{1}{2}.3^2 - 3.3\right)\right]$$

$$= -\left[\left(4\frac{1}{2} - 9\right) - \left(\frac{1}{2} - 3\right)\right] + \left[\left(12\frac{1}{2} - 15\right) - \left(4\frac{1}{2} - 9\right)\right]$$

$$= -\left(-4\frac{1}{2} - \left(-2\frac{1}{2}\right)\right) + \left(\left(-2\frac{1}{2}\right) - \left(-4\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= -(-\tfrac{1}{2}^{-2}) + 2$$

$$= 2 + 2 = 4$$

Jadi luas daerahnya = 4 satuan luas.

Latihan 10.

Tentukan nilai integral tertentu dari soal-soal di bawah ini

1. $\int_{-2}^{1} (x-1)dx$
2. $\int_{-2}^{2} x^2 dx$
3. $\int_{0}^{9} x\sqrt{x}\, dx$
4. $\int_{-1}^{3} (3x-2)dx$
5. $\int_{1}^{2} (x-1)(3x-1)dx$
6. Tentukan p sedemikian hingga $\int_{0}^{p} x(2-x)dx = 0$
7. $\int_{0}^{p} (x^{\frac{1}{2}}+1)^3 dp$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x + \cos 2x) dx$

10. $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \cos^3 x \sin x \, dx$

11. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh f(x) = 6 - 2x, sumbu x dari x = 1 samapai dengan x = 3.

12. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh f(x) = $x^2 + 2$, sumbu X dari x = 1 sampai dengan x = 4

13. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh f(x) = $16 - x^2$ dari x = 0 sampai dengan x = 4

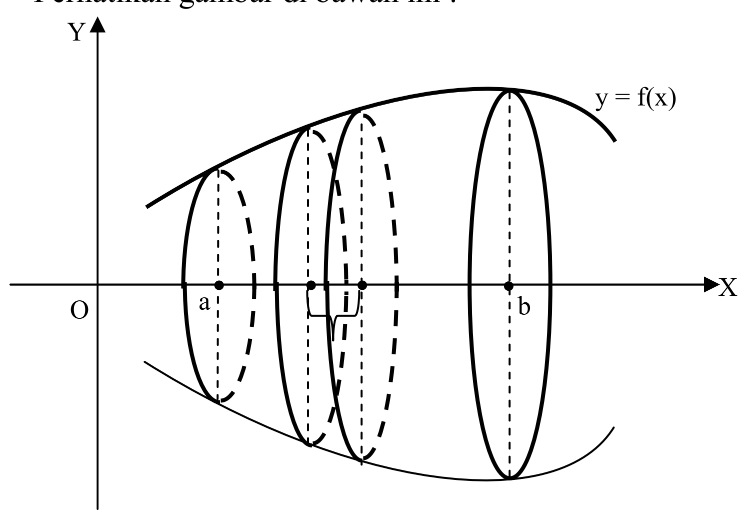
14. Tunjukkan bahwa luas daerah lingkaran dengan jari-jari r adalah πr^2

15. Tunjukkan bahwa luas daerah ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ adalah πab.

16. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva berikut :
    a. $y = x^2$ dan $y = \sqrt{x}$
    b. $y = x^2 + 4$ dan $x + y = 6$
    c. y = sin x dan y = cos x dari $x = \frac{\pi}{4}$ sampai dengan $x = 1\frac{1}{4}\pi$

3 Menentukan Volum Benda Putar

Perhatikan gambar di bawah ini :



Untuk menentukan volum benda putar yang dibentuk oleh y = f(x) yang diputar mengelilingi sumbu-X pada interval [a,b] kita bagi-bagi benda tersebut menjadi keratan-keratan, di mana setiap keratan mempunyai volum :

$$v_i = \pi f(x_i)^2.\Delta x_i$$

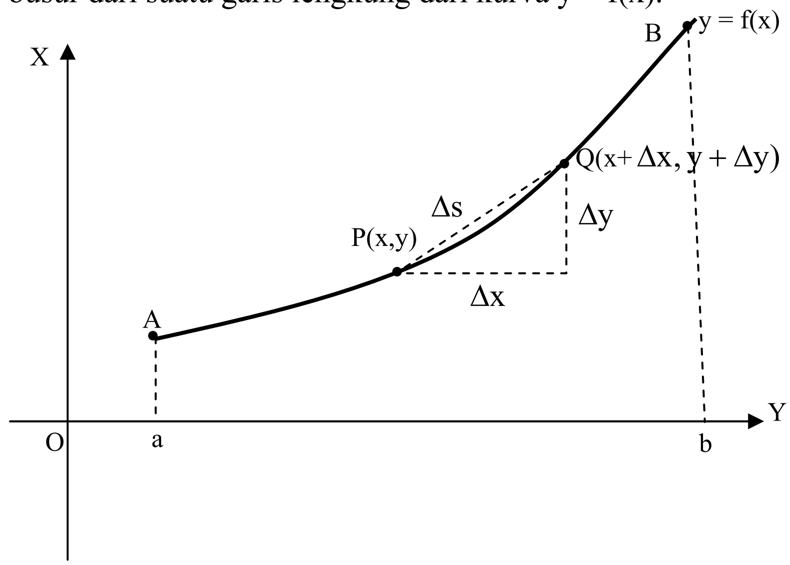
Sehingga volum keseluruhan :

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i=a}^{b} \pi f(x_i)^2.\Delta x_{i=\pi} \sum_{a}^{b} f(x_i)^2.\Delta x_i \text{ atau :}$$

$$\boxed{v = \pi \int_a^b f(x)^2 dx \quad \text{atau} \quad v = \pi \int_a^b y^2 dx}$$

4. **Panjang Busur (Materi Pengayaan)**

Aplikasi lebih klanjut dari integral tertentu adalah untuk menghitung panjang busur dari suatu garis lengkung dari kurva y = f(x).



Misalkan gambar di atas memperlihatkan kurva y = f(x), dan titik-titik A dan B pada kurva y = f(x). Jika kurva y = f(x) dan turunan-turunan kontinu dalam interval [a,b], maka panjang busur AB dapat ditentukan sebagai berikut :

Misalkan titik-titik P(x,y) dan titik $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ terletak pada kurva y = f(x). Panjang PQ dapat ditentukan dengan menggunakan teorema Pythagoras :

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Panjang busur AB dapat dinyatakan sebagai limit jumlah segmen-segmen Δs yaitu :

$$s = \lim_{\Delta s \to 0} \sum \Delta s$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.\Delta x$$

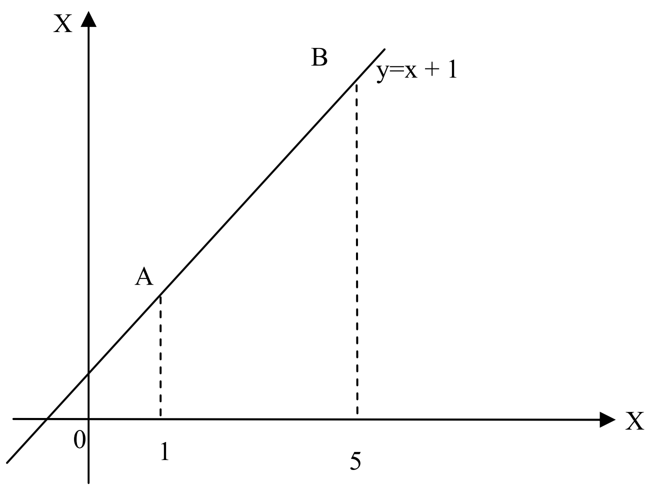
Hubungan di atas jika disjikan dalam notasi Riemann, akan menjadi :

$$\boxed{s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dy}$$

Contoh 1.

Tentukan panjang garis dengan persamaan y = x + 1 dari x = 1 sampai dengan x = 5 !

Jawab:



Dari y = x + 1 maka $\frac{dy}{dx} = 1$

Panjang busur AB :

$$s = \int_1^5 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_1^5 \sqrt{1 + 1^2}\, dx$$

$$= \int_1^5 \sqrt{2}\, dx$$

$$= \left[x\sqrt{2}\right]_1^5 = 5\sqrt{2 - 1\sqrt{2}}$$

$$= 4\sqrt{2}$$

Jadi panjang ruas AB = $4\sqrt{2}$ satuan panjang.

Catatan : Kebenaran jawab ini dapat anda cek dengan menggunakan rumus jarak dua titik A(1,2) dan B(5,6).

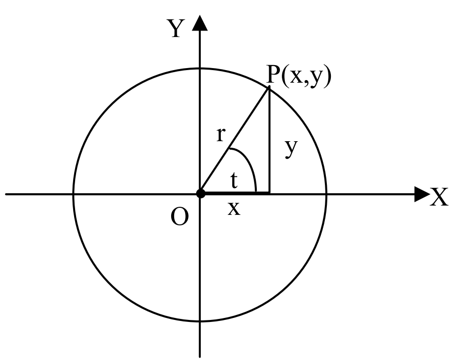
Untuk kurva-kurva yang disajikan dalam bentuk parameter x = x(t) dan y = y(t) maka panjang busur AB dapat ditentukan dengan rumus :

$$\boxed{s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt}$$

Rumus ini diturunkan dari rumus $s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ dengan menggunakan substitusi :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dt} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Contoh 2.
Tunjukkan bahwa keliling lingkaran dengan jari-jari r adalah $2\pi r$.
Bukti :



Persamaan lingkaran di samping ini, jika disajikan dalam persamaan parameter :

x = r cos t
y = r sin t

Dari x = r cos t $\rightarrow \frac{dy}{dt} = -r\sin t$

y = r sin t $\rightarrow \frac{dx}{dt} = r\cos t$

Sehingga keliling lingkarannya, digunakan rumus

$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\,dt$, untuk lingkaran di atas :

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}\,dt$$

$$= r\int_0^{2\pi} dt = r[t]_0^{2\pi} = r(2\pi - 0) = 2\pi r$$

Dengan demikian terbukti bahwa keliling lingkaran dengan jari-jari r adalah $2\pi r$ satuan panjang.

5. **Penerapan Integral Dalam Bidang Usaha dan Perekonomian.**

Banyak penerapan kaonsep integral yang amat bermanfaat bagi kehidupan manusia dalam berbagai bidang termasuk dalam hal perindustrian dan perekonomian.

Berikut ini beberapa contoh penerapannya :

Contoh 1

Fungsi biaya marginal dari suatu pabrik dalam produksinya adalah :

$c'(x) = \frac{1}{100}x^2 - 2x + 120$, di mana x adalah banyaknya unit produksi setiap hari. Pabrik tersebut mengeluarkan biaya tetap Rp 2.000.000,00 setiap hari. Tentukan biaya produksi setiap harinya.

Penyelesaian :

Biaya produksi = C(x) = $\int (\frac{1}{100}x^2 - 2x + 120)dx$

$$= \frac{1}{300}x^3 - x^2 + 120x + c$$

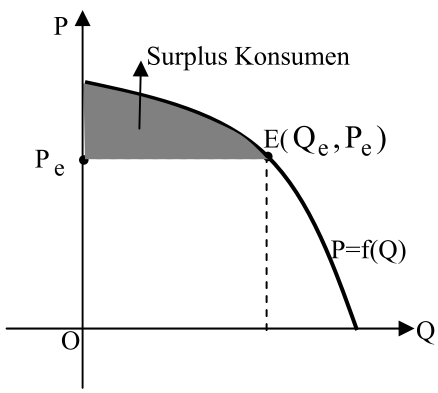
Biaya tetap = C(0) = 2.000.000, sehingga :

$$2.00.00 \quad = \frac{1}{300}.0 - 0 + 0 + c \Rightarrow c = 2.000.000$$

Jadi biaya produksi setiap harinya adalah :

$$C(x) = \frac{1}{300}x^3 - x^2 + 120x + 2.000.000$$

Menghitung Surplus Konsumen.



Surplus konsumen merupakan keuntungan lebih yang dinikmati konsumen berkenaan dengan tingkat harga pasar tertentu.

Bagi konsumen yang sebenarnya mampu membayar harga di atas harga pasar E akan mendapatkan untung sebesar :

$$SK = \int_0^{Q_e} f(Q)dQ - Q_e.P_e$$

Contoh 2:

Diketahui fungsi permintaan : $P = 12 - 2Q^2$

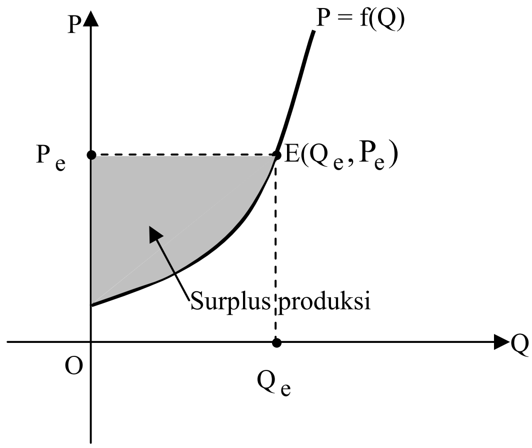
Carilah surplus konsumen jika Q = 2

Penyelesaian : $p = 12 - 2.2^2 = 4$

$$SK = \int_0^2 (10 - 2Q^2)dQ - P.Q$$

$$= \left[10Q - \tfrac{2}{3}Q^3\right]_0^2 - 4.2 = 6\tfrac{2}{3}$$

Menghitung Surplus Konsumen.



Dengan jalan yang mirip dengan surplus konsumen, maka surplus produksi (SP) dihitung dengan menggunakan rumus

$$SP = P_e.Q_e - \int_0^{Q_e} f(Q)dQ$$

di mana P = f(Q) adalah fungsi penawaran.

Latihan 11.

1. Tentukan volum benda yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva di bawah ini diputar sekeliling sumbu X.
   a. $y = 9 - x^2$
   b. $y = x^2$ dan $y = 4x$
   c. $y = x^2$ dan $y = x^3$
2. Hitung panjang busur dari kurva y = 2x + 3 dari x = 1 sampai dengan x = 5
3. Hitung panang busur kurva $y = x^{\frac{3}{2}}$ dari x = 1 hingga x = 5
4. Hitung panjang busur kurva $y = 2x^{\frac{3}{2}}$ dari x = 0 hingga x = 5
5. Tentukan panjang busur kurva $24xy = x^4 + 48$ dari x = 2 sampai dengan x = 4
6. Tentukan panjang busur sikloida $x = \theta - \sin\theta$; $y = 1 - \cos\theta$ dari $\theta = 0$ dan $\theta = 2\pi$
7. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $6xy = x^4 + 3$ dari x = 1 sampai dengan x = 2

8. Fungsi biaya marginal suatu produk adalah : $P' = \frac{1}{30}Q^2 - 2Q - 450$. Jika diketahui biaya tetapnya adalah Rp 1.000.000,00.

   Carilah fungsi biayanya dan biaya total untuk produksi 40 unit.

9. Diketahui fungsi permintaan : $P = 50 - 4Q^2$
   a. Carilah surplus konsumsen jika Q = 3
   b. Gambarlah fakta itu.

10. Fungsi permintaan penawaran suatu barang adalah : $P = 12 - \frac{x}{50}$ dan $P = \frac{x}{20} + 5$

    Tentukan besarnya surplus konsumen dan surplus produsen dan gambarkan pada suatu diagram.

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, Frank Jr. (1972), *Theory and Problem of Differensial and Integral Calculus.* Mc Graw Hill : New York.

Fatah Asyarie, dkk. (1992), *Kalkulus untuk SMA.* Pakar Raya : Bandung.

Herry Sukarman. (1998), *Kalkulus,* Makalah Penataran Guru Matematika MGMP SMU. PPPG matematika : Yogyakarta.

Johannes, H dan Budiono Sri Handoko. (1988), *Pengantar Matematika untuk Ekonomi.* LP3ES : Jakarta.

Piskunov, N. (1974), *Differensial and Integral Calculus.* Mir Publishers : Moscow.

Purcell, Edwin Jaud Dale Varberg. *Kalkulus dan Geometri Analitik.* PT. Penerbit Erlangga : Jakarta.

Sri Kurnianingsih, dkk. (1995), *Matematika SMU,* Yudhistira : Jakarta.

Sumadi, dkk. (1997), *Matematika SMU,* PT. Tiga Serangkai : Surakarta.

Thomas, George B. Jr. (1977), *Calculus and Analytic Geometry,* Addison-Werley Publishers Company.